

SORU: Şekil ile verildiği gibi bir piston-silindir düzeneğinde sürtünmesiz piston, başlangıçta durdurucu üzerinde yapışık şekilde durmaktadır. Piston-silindir düzeneği içinde başlangıçta **220.16 kPa** basınçta ve **300 K** sıcaklıkta **3.5 kg** hava vardır. Pistonu hareket ettirebilmek için basıncın **455 kPa** değerine ulaşması gerekmektedir. Piston-silindir düzeneğinin başlangıçtaki hacmi **2** katına çıkana kadar piston-silindir düzeneğine ısı girişi oluyor. Bu çerçevede değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havanın yaptığı işi [**kJ**] olarak, havaya aktarılan toplam ısıyı [**kJ**] olarak, son durumdaki havanın yoğunluğunu [**kg/m³**] olarak ve pistonun kütleini [**kg**] olarak belirleyiniz. Ayrıca işlemi bir P (kPa)-V (m³) diyagramında gösteriniz. [Atmosfer basıncını **101 kPa** ve pistonun çapını **0.3 m** olarak alınız].



ÇÖZÜM: Bu soruda hava sistemdir. Kapalı bir sistem olan sürtünmesiz-durduruculu piston-silindir düzeneği içindeki havanın başlangıçtaki basıncı, toplam dış basınçtan küçük olduğu için sistem başlangıçta sabit hacim işlemi içerecektir. Toplam dış basınç ile iç basınç eşitlendiğinde ise sabit basınç işlemine geçilecektir. Sistem hal 1'den hal 2'ye ve sonra hal 3'e gelecektir. Hal 1 ve hal 2 arası sabit hacim işlemi, hal 2 ile hal 3 arası ise sabit basınç işlemi olacaktır.

Verilenler

- Sistemin başlangıç basıncı: $P_1 = 220.16 \text{ kPa}$
- Sistemin başlangıç sıcaklığı: $T_1 = 300 \text{ K}$
- Havanın kütlesi: $m = 3.5 \text{ kg}$
- Pistonun hareket etmesi için gerekli basınç: $P_2 = 455 \text{ kPa}$
- Son hacim ile ilk hacim arasındaki değişim: $V_3 = 2V_1$
- Atmosfer basıncı: $P_{\text{atm}} = 101 \text{ kPa}$
- Pistonun çapı: $D = 0.3 \text{ m}$
- Havanın gaz sabiti: $R = 0.287 \text{ kJ/kgK}$ (Tablodan)

Kabuller

- Piston-silindir düzeneği sürtünmesizdir.
- Hava ideal gazdır.
- Yerçekimi ivmesi $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ olarak alınabilir.

Çözüm

Hal 2 ile hal 3 arasında sabit basınç işlemi gerçekleşecektir. Bu kapsamda hacim değişimi (ısı girişi olduğu için hacim artışı) olacağı için sınır işi aşağıda verildiği gibi hesaplanır:

$$W_{\text{çıkan, sınır}} = \int_2^3 P(V)dV \rightarrow W_{\text{çıkan, sınır}} = P_2 \int_2^3 dV = mP_2 \Delta V = mP_2(v_3 - v_2) \text{ (J)}$$

Özgül hacimler $v_1 = v_2, v_3$ ve çıkan sınır işi aşağıda verildiği gibi belirlenir:

$$P_1 v_1 = RT_1 \rightarrow (220.16 \text{ kPa})v_1 = (0.287 \text{ kJ/kgK})(300 \text{ K}) \rightarrow v_1 = 0.3911 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$v_2 = v_1 = 0.3911 \text{ m}^3/\text{kg} \text{ ve } v_3 = 2v_1 \rightarrow v_3 = 2(0.3911 \text{ m}^3/\text{kg}) = 0.7822 \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$W_{\text{çıkan, sınır}} = mP_2(v_3 - v_2)$$

$$W_{\text{çıkan, sınır}} = (3.5 \text{ kg})(455 \text{ kPa})(0.7822 - 0.3911) \text{ m}^3/\text{kg}$$

$$W_{\text{çıkan, sınır}} = 622.83 \text{ kJ}$$

Havanın yaptığı iş, sınır işidir ve çıkan sınır işi 622.83 kJ olarak belirlenmiştir.

Sisteme aktarılan toplam ısı miktarı için termodinamiğin birinci yasası kapsamında enerji dengesi eşitliği aşağıda verildiği gibi yazılır:

$$E_{\text{giren}} - E_{\text{çıkan}} = \Delta E_{\text{sistem}} \text{ (J)}$$

$$E_{\text{giren}} = Q_{\text{giren}}, E_{\text{çıkan}} = W_{\text{çıkan, sınır}} \text{ ve } \Delta E_{\text{sistem}} = \Delta U$$

$$Q_{\text{giren}} - W_{\text{çıkan, sınır}} = \Delta U \rightarrow Q_{\text{giren}} = W_{\text{çıkan, sınır}} + \Delta U$$

$$Q_{\text{giren}} = mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_1) \text{ (J)}$$

Sistem, hem sabit hacim işleminden (hal 1 ve hal 2 arası) hem de sabit basınç işleminden (hal 2 ve hal 3 arası) geçmektedir. Hal 1'den hal 3'e gelinceye kadar sistemin iç enerjisi artmakta ve hal 2 ile hal 3 arasında ise sınır işi çıkışı da gerçekleşmektedir. Tüm bu artışlar sisteme giren ısı sayesinde olmaktadır. Bu kapsamda sisteme giren toplam ısı miktarı yukarıda verilen eşitlikten hesaplanır. Değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havaya ait tablodan özgül iç enerji (u) ve özgül entalpiler (h) aşağıda verildiği gibi belirlenir ve giren toplam ısı miktarı aşağıda verildiği gibi hesaplanır:

$$T_1 = 300 \text{ K} \rightarrow u_1 = 214.07 \text{ kJ/kg} \text{ ve } h_1 = 300.19 \text{ kJ/kg}$$

$$v_1 = v_2 \rightarrow P_2 v_2 = RT_2 \rightarrow (455 \text{ kPa})(0.3911 \text{ m}^3/\text{kg}) = (0.287 \text{ kJ/kgK})T_2$$

$$v_1 = v_2 \rightarrow T_2 = 620 \text{ K}$$

$$T_2 = 620 \text{ K} \rightarrow u_2 = 450.09 \text{ kJ/kg} \text{ ve } h_2 = 628.07 \text{ kJ/kg}$$

$$v_3 = 2v_1 \left\{ \begin{array}{l} P_3 v_3 = RT_3 \\ (455 \text{ kPa})(0.7822 \text{ m}^3/\text{kg}) = (0.287 \text{ kJ/kgK})T_3 \end{array} \right. \rightarrow T_3 = 1240 \text{ K}$$

$$T_3 = 1240 \text{ K} \rightarrow u_3 = 968.95 \text{ kJ/kg} \text{ ve } h_3 = 1324.93 \text{ kJ/kg}$$

$$Q_{\text{giren}} = \overbrace{m(u_2 - u_1)}^{\text{sabit hacim işlemi}} + \overbrace{mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_2)}^{\text{sabit basınç işlemi}}$$

$$Q_{\text{giren}} = mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_1)$$

$$Q_{\text{giren}} = (622.83 \text{ kJ}) + m(u_3 - u_1)$$

$$Q_{\text{giren}} = (622.83 \text{ kJ}) + (3.5 \text{ kg})(968.95 - 214.07) \text{ kJ/kg}$$

$$Q_{\text{giren}} = (622.83 \text{ kJ}) + (2642.08 \text{ kJ}) = 3264.91 \text{ kJ}$$

Değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havaya aktarılan toplam ısı miktarı 3264.91 kJ olarak hesaplanmıştır.

Değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havaya aktarılan toplam ısı miktarı aşağıda verilen iki farklı yaklaşım altında da hesaplanabilir:

Birinci yaklaşım:

Sadece sabit hacim işlemi için sisteme aktarılan ısı miktarı aşağıda verildiği gibi belirlenir:

$$Q_{\text{giren, sabit hacim}} = m(u_2 - u_1) \text{ (J)}$$

$$Q_{\text{giren, sabit hacim}} = (3.5 \text{ kg})(450.09 - 214.07) \text{ kJ/kg}$$

$$Q_{\text{giren, sabit hacim}} = 826.07 \text{ kJ}$$

Sadece sabit basınç işlemi için sisteme aktarılan ısı miktarı aşağıda verildiği gibi hesaplanır:

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_2) \text{ (J)}$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = (622.83 \text{ kJ}) + (3.5 \text{ kg})(968.95 - 450.09) \text{ kJ/kg}$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = 2438.84 \text{ kJ}$$

Değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havaya aktarılan toplam ısı miktarı ise sabit hacim işlemi ve sabit basınç işleminden elde edilen giren ısı miktarlarının toplamına eşit olur:

$$Q_{\text{giren}} = Q_{\text{giren, sabit hacim}} + Q_{\text{giren, sabit basınç}}$$

$$Q_{\text{giren}} = (826.07 \text{ kJ}) + (2438.84 \text{ kJ}) = 3264.91 \text{ kJ}$$

İkinci yaklaşım:

Sadece sabit basınç işlemi için sisteme aktarılan ısı miktarı özgül entalpiler yardımıyla aşağıda verildiği gibi hesaplanır:

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_2) = m[(P_3 v_3 - P_2 v_2) + (u_3 - u_2)]$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = m[(P_3 v_3 - P_2 v_2) + (u_3 - u_2)]$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = m(h_3 - h_2)$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = (3.5 \text{ kg})(1324.93 - 628.07) \text{ kJ/kg}$$

$$Q_{\text{giren, sabit basınç}} = 2439.01 \text{ kJ}$$

Sadece sabit basınç işlemi için birinci yaklaşımda bulunan ısı girişi değeri ile ikinci yaklaşımda bulunan ısı girişi değeri birbirine çok yakındır. Aradaki fark tablo ve hesap değerlerinin yuvarlatılmasından kaynaklanmaktadır. Değişken özgül ısılar yaklaşımı altında havaya aktarılan toplam ısı miktarı benzer şekilde sabit hacim işlemi ve sabit basınç işleminden elde edilen giren ısı miktarlarının toplamına eşit olur:

$$Q_{\text{giren}} = Q_{\text{giren, sabit hacim}} + Q_{\text{giren, sabit basınç}}$$

$$Q_{\text{giren}} = (826.07 \text{ kJ}) + (2439.01 \text{ kJ}) = 3265.08 \text{ kJ}$$

Son durumdaki havanın özgül hacmi $v_3 = 0.7822 \text{ m}^3/\text{kg}$ olarak bulunmuştur. Bu kapsamda havanın yoğunluğu aşağıda verildiği gibi belirlenir:

$$v_3 = 0.7822 \text{ m}^3/\text{kg} \rightarrow \rho_3 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{0.7822 \text{ m}^3/\text{kg}} = 1.278 \text{ kg}/\text{m}^3$$

Son durumdaki havanın yoğunluğu $1.278 \text{ kg}/\text{m}^3$ olarak belirlenmiştir.

Sabit basınç işleminde dik piston-silindir düzeneği için yerçekimi ivmesi yönündeki toplam basınç (pistonun basıncı + atmosfer basıncı), yerçekimi ivmesinin ters yönündeki iç basınca (havanın basıncına) eşit olacaktır. Pistonun ağırlığı W_{piston} (N) ve dairesel pistonun yüzey alanı A_{piston} (m^2) ise denge durumunda aşağıda verilen eşitlik yazılabilir ve buradan pistonun kütlesi belirlenebilir:

$$P_{\text{piston}} + P_{\text{atm}} = P_{\text{hava}} \rightarrow P_{\text{piston}} + P_{\text{atm}} = P_3$$

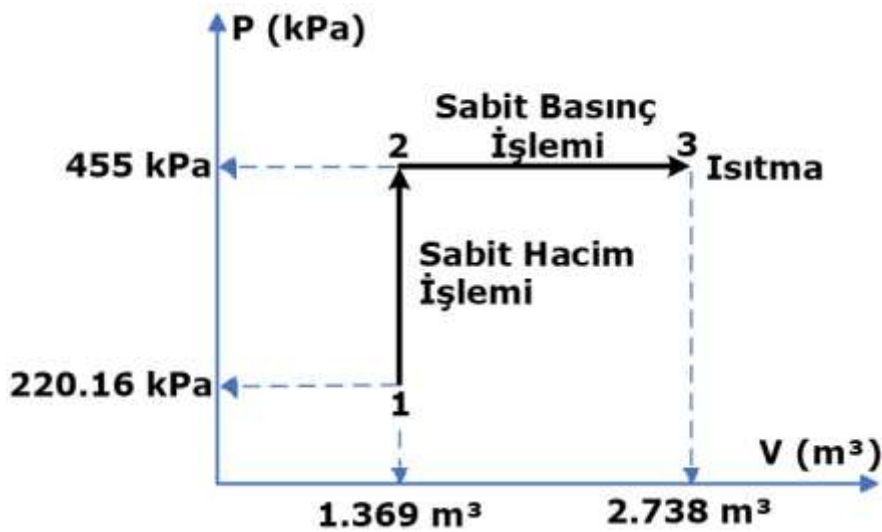
$$P_{\text{piston}} + P_{\text{atm}} = P_3 \rightarrow \frac{W_{\text{piston}}}{A_{\text{piston}}} + P_{\text{atm}} = P_3 \rightarrow \frac{(m_{\text{piston}})g}{(\pi D^2)/4} + P_{\text{atm}} = P_3$$

$$\frac{(m_{\text{piston}})g}{(\pi D^2)/4} + P_{\text{atm}} = P_3 \rightarrow \left[\frac{4(m_{\text{piston}})(9.81 \text{ m/s}^2)}{\pi(0.3 \text{ m})^2} \text{ Pa} \right] + (101000 \text{ Pa}) = (455000 \text{ Pa})$$

$$m_{\text{piston}} = 2550.74 \text{ kg}$$

Pistonun kütlesi 2550.74 kg olarak belirlenmiştir.

$V_1 = V_2 = (3.5 \text{ kg})(0.3911 \text{ m}^3/\text{kg}) = 1.369 \text{ m}^3$ ve $V_3 = 2V_1 = 2(1.369 \text{ m}^3) = 2.738 \text{ m}^3$ için suya ait P (kPa)- V (m^3) diyagramı aşağıda verildiği gibi çizilir:



Ek bilgi: Ortalama özgül ısılar yaklaşımı altında ise, hal 3 ile hal 1 arasındaki ortalama sıcaklık ve havaya aktarılan toplam ısı miktarı aşağıda verildiği gibi hesaplanabilir:

$$T_{\text{ortalama}} = \frac{(T_1 + T_2) \text{ K}}{2} = \frac{(300 + 620) \text{ K}}{2} = 460 \text{ K}$$

$$T_{\text{ortalama}} = 460 \text{ K} \rightarrow c_{v,o} = 0.735 \text{ kJ/kgK}$$

$$T_{\text{ortalama}} = \frac{(T_2 + T_3) \text{ K}}{2} = \frac{(620 + 1240) \text{ K}}{2} = 930 \text{ K}$$

$$T_{\text{ortalama}} = 930 \text{ K} \rightarrow c_{v,o} = 0.840 \text{ kJ/kgK} \text{ ve } c_{p,o} = 1.127 \text{ kJ/kgK}$$

Sabit hacim işleminde ortalama sabit hacim özgül ısısının ($c_{v,o}$) kullanıldığına ve sabit basınç işleminde ise ortalama sabit basınç özgül ısısının ($c_{p,o}$) kullanıldığına dikkat edilmelidir.

$$Q_{\text{giren}} = m(u_2 - u_1) + mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_2)$$

$$Q_{\text{giren}} = \overbrace{mc_{v,o}(T_2 - T_1)}^{\text{sabit hacim işlemi}} + m \overbrace{[P_2(v_3 - v_2) + c_{v,o}(T_3 - T_2)]}^{\text{sabit basınç işlemi}}$$

$$Q_{\text{giren}} = (3.5 \text{ kg})(0.735 \text{ kJ/kg/K})(620 - 300) \text{ K} +$$

$$(3.5 \text{ kg})[(455 \text{ kPa})(0.7822 - 0.3911) \text{ m}^3/\text{kg} + (0.840 \text{ kJ/kgK})(1240 - 620) \text{ K}]$$

$$Q_{\text{giren}} = 823.2 \text{ kJ} + 2445.63 \text{ kJ} = 3268.83 \text{ kJ}$$

Yukarıda verilen eşitlikte yer alan sabit basınç işlemi aşağıda verildiği gibi de yazılabilir:

$$Q_{\text{giren}} = m(u_2 - u_1) + mP_2(v_3 - v_2) + m(u_3 - u_2)$$

$$Q_{\text{giren}} = m(u_2 - u_1) + m(h_3 - h_2)$$

$$Q_{\text{giren}} = \overbrace{mc_{v,o}(T_2 - T_1)}^{\text{sabit hacim işlemi}} + \overbrace{mc_{p,o}(T_3 - T_2)}^{\text{sabit basınç işlemi}}$$

$$Q_{\text{giren}} = (3.5 \text{ kg})(0.735 \text{ kJ/kg/K})(620 - 300) \text{ K}$$

$$+ (3.5 \text{ kg})(1.127 \text{ kJ/kgK})(1240 - 620) \text{ K}$$

$$Q_{\text{giren}} = 823.2 \text{ kJ} + 2445.59 \text{ kJ} = 3268.79 \text{ kJ}$$

Ortalama özgül ısılar yaklaşımı altında havaya aktarılan toplam ısı miktarı 3268.79 kJ olarak hesaplanmıştır.

Değişken özgül ısılar yaklaşımı gerçeğe daha yakın sonuçlar vermektedir. Ortalama özgül ısılar yaklaşımında hata oranı artmaktadır.
